MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 3
4.11.2019

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

1. Gegeben sei die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{y^2} - \frac{y^2}{16},$$

mit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \ \text{ und } \ y \neq 0\}$.

   a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.

   b) Ist f nach oben beschränkt?

2. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - e^{xy}.$$

Zeigen Sie:

   a) f besitzt genau ein relatives Extremum, und zwar ein Minimum.

   b) f ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

3. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2\,x^2 - 2\,y^2 + 4\,x\,y.$$

   a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und zeigen Sie, daß f an den Stellen $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ und $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ein lokales Minimum besitzt.

   b) Zeigen Sie, daß f in $(0,0)$ **kein** lokales Extremum besitzt (betrachten Sie dazu f auf den beiden Winkelhalbierenden).

4. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Schwarz, daß ein **keine** partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\operatorname{grad} f(x_1,x_2) = (x_1 x_2^2\,,\, x_1^2 + x_2) \qquad \text{für alle} \ \ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Für die Tutorien vom 4.11. und 6.11.19